Title	L^p-空間の間の合成作用素(解析・調和関数空間の構造とその上の作用素論)
Author(s)	高木, 啓行; 横内, 克彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 946: 18-24
Issue Date	1996-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/60250
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 18-24

L^p-空間の間の合成作用素

信州大 理　高木 啓行 (Hiroyuki Takagi)
横内 克彦 (Katsuhiko Yokouchi)

合成作用素は, シフト作用素や等長作用素, 関数の従属性などにも関係しているから, その研究の歴史は, かなり古くまでさかのぼることができる. しかし, 実際に "合成作用素" という用語を用いて, 本格的に議論を始めたのは, E.A. Nordgren [11] や H.J. Schwartz [15] であった. 彼らは, Hardy 空間 $H^2(D)$ 上の合成作用素を扱ったが, その後, さまざまな関数空間 ——Bergman 空間, 連続関数の空間, L^p-空間など—— の上の合成作用素が研究されるようになった. その様子は, 報告書 [4], [12] や, 最近発刊された 3 冊の専門書 [5], [16], [20] などから, うかがい知ることができる. ここでは, L^p-空間上の合成作用素について, 考えていく.

L^p-空間, とくに L^2-空間上の合成作用素に関しては, R.K. Singh, A. Kumar, A. Lambert, W.C. Ridge, R. Whitley など, 多くの数学者により, 活発に研究がすすめられている. 主だった論文をあげると, [2], [6], [7], [9], [10], [14], [17] - [19], [21] - [23] などである. R.K. Singh and J.S. Manhas 著の本 [20] の Chapter 2 では, その研究成果がほとんど網羅されている. それからもわかるように, これまでは, 同じ L^p-空間の間の合成作用素についての研究であった. そこで, ここでは, 異なった L^p-空間の間の合成作用素を, とりあげることにした. 異なった空間の間の作用素, とくに乗法作用素については, S. Axler [1] や K. Izuchi [8], S. Ohno [13] などが, 研究しており, その流れに乗って, 今回このような問題設定を考えてみた. そして, 合成作用素が L^p-空間の間の写像あるいは有界線形作用素になるための条件を求めた. 過去には, R.K. Singh [17] が, 同じ L^p-空間の間の合成作用素が, 有界になるための必要十分条件を与えているが, ここでは, それを大幅に拡張して, 異なる L^p-空間の間の合成作用素を完全に特徴づけた. それらは, 3 種類のタイプで記述される (定理 1.1, 1.2, 1.3). また, L^p-空間の間の合成作用素が閉値域をもつための条件も与えた. そのひとつの結果 (定理 2.1) は, R.K. Singh and A. Kumar の結果 [18] を含んでいるし, 空間が異なる場合の結果 (定理 2.2, 2.3) は, 今回新しく得た部分である.

全般で用いる記号や用語を, ここでまとめておこう. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ を, σ-有限な測度空間とする. X 上の $\mathfrak{M}$-可測関数全体の集合, および, Y 上の $\mathfrak{N}$-可測関数全体の集合は,

それぞれ $\mathfrak{L}(X), \mathfrak{L}(Y)$ とかくことにする．また, Y から X への写像 φ が,

$$E \in \mathfrak{M} \implies \varphi^{-1}(E) \in \mathfrak{N}$$

をみたすとき, φ を, Y から X への 可測変換 (measurable transformation) と呼ぶ．以下では, φ は Y から X への可測変換とする．それに関して, $\mathfrak{M}$ 上の測度 $\nu\varphi^{-1}$ を,

$$\nu\varphi^{-1}(E) = \nu(\varphi^{-1}(E)) \qquad (E \in \mathfrak{M})$$

と定める．

定義　Y から X への可測変換 φ を ひとつ 固定しておき, 作用素 C_φ を

$$C_\varphi f(y) = f(\varphi(y)) \qquad (y \in Y,\ f \in \mathfrak{L}(X))$$

と定義する．すると, C_φ は, $\mathfrak{L}(X)$ から $\mathfrak{L}(Y)$ への 線形作用素になる．この作用素 C_φ を, $\mathfrak{L}(X)$ から $\mathfrak{L}(Y)$ への 合成作用素 (composition operator) と呼ぶ.

1. 有界な合成作用素

この節の目的は, つぎの問題を 解決することである．

> $\mathfrak{L}(X)$ から $\mathfrak{L}(Y)$ への合成作用素 C_φ が, $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ から $L^q(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ への写像になるための 必要十分条件を 求めよ．ただし, $1 \le p < \infty$, $1 \le q < \infty$.

ここで, C_φ が, $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ から $L^q(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ への写像であるとは, つぎの 2 条件 (i), (ii) がみたされることである．

(i) f と g が μ に関して ほとんどいたるところ等しい
$\implies$ $C_\varphi f$ と $C_\varphi g$ が ν に関して ほとんどいたるところ等しい.

(ii) $f \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu) \implies C_\varphi f \in L^q(Y, \mathfrak{N}, \nu)$.

2 つの測度空間 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ が同じで, しかも $p = q$ である場合については, 上の問題に関して, つぎの定理が 知られている．

定理　([**17**; R.K. Singh])　$1 \le p < \infty$ とする．$\mathfrak{L}(X)$ から $\mathfrak{L}(X)$ への合成作用素 C_φ が, $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ から $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ への 有界線形作用素となるための 必要十分条件は,

$$\mu(\varphi^{-1}(E)) \le c\mu(E) \qquad (E \in \mathfrak{M})$$

をみたす 定数 c が 存在することである．

以下の定理は, これを拡張したものである．

I. $p = q$ の場合

定理 1.1. $1 \leq p < \infty$ とする. $\mathfrak{L}(X)$ から $\mathfrak{L}(Y)$ への合成作用素 C_φ について, つぎの 3 条件 (i) ~ (iii) は たがいに同値である.

(i) C_φ が, $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ から $L^p(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ への写像になる.

(ii) 測度 $\nu\varphi^{-1}$ は, 測度 μ に関して絶対連続で, その Radon-Nikodym 導関数 u_φ が $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に属す.

(iii) ある定数 c に対して,

$$\nu\varphi^{-1}(E) \leq c\mu(E) \qquad (E \in \mathfrak{M}) .$$

これらの (i) ~ (iii) の どれかひとつが 成り立つとき, C_φ は, $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ から $L^p(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ への有界線形作用素になり,

$$\|C_\varphi\| = \sqrt[p]{\|u_\varphi\|_{L^\infty}} = \inf\left\{\sqrt[p]{c} : \nu\varphi^{-1}(E) \leq c\mu(E) \ \ (E \in \mathfrak{M})\right\} .$$

II. $p > q$ の場合

任意の $F \in \mathfrak{M}$ に対して,

$$Q_\varphi(F) = \inf\left\{c \geq 0 : \nu\varphi^{-1}(E) \leq c\mu(E) \ \ (E \in \mathfrak{M}, E \subset F)\right\}$$

とおく.

定理 1.2. $1 \leq q < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$ とする. $\mathfrak{L}(X)$ から $\mathfrak{L}(Y)$ への合成作用素 C_φ について, つぎの 3 条件 (i) ~ (iii) は たがいに同値である.

(i) C_φ が, $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ から $L^q(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ への写像になる.

(ii) 測度 $\nu\varphi^{-1}$ は, 測度 μ に関して絶対連続で, その Radon-Nikodym 導関数 u_φ が $L^{\frac{r}{q}}(X, \mathfrak{M}, \mu)$ に属す.

(iii) つぎの式をみたす X の分割 $\{F_j\}$ が 存在する.

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_\varphi(F_j)^{\frac{r}{q}} \mu(F_j) < \infty .$$

これらの (i) ~ (iii) の どれかひとつが 成り立つとき, C_φ は, $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ から $L^q(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ への有界線形作用素になり,

$$\|C_\varphi\| = \|\sqrt[q]{u_\varphi}\|_{L^r} = \inf\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty} Q_\varphi(F_j)^{\frac{r}{q}} \mu(F_j)\right)^{\frac{1}{r}} : \{F_j\} \text{ は } X \text{の分割}\right\} .$$

III. $p < q$ の場合

$\mu(A) > 0$ なる 集合 $A \in \mathfrak{M}$ をとる. A が 原子元 (atom) であるとは,

$$E \in \mathfrak{M},\ E \subset A \implies \mu(E) = 0 \ \text{ or } \ \mu(E) = \mu(A)$$

となることである．また，σ-有限な測度空間 X は，つぎのように分割できる．

$$X=\bigcup_{n\in N}A_n\cup B$$

ただし，各 A_n は 原子元で，B は 原子元を含まない集合である．N は，だかだか可算個の添字集合である．

定理 1.3. $1\le p<q<\infty$ とする．$\mathfrak{L}(X)$ から $\mathfrak{L}(Y)$ への合成作用素 C_φ について，つぎの 3 条件 (i) ～ (iii) は たがいに同値である．

(i) C_φ が，$L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^q(Y,\mathfrak{N},\nu)$ への写像になる．

(ii) 測度 $\nu\varphi^{-1}$ は，測度 μ に関して絶対連続で，その Radon-Nikodym 導関数 u_φ が，B 上 ほとんどいたるところ 0 で，かつ，$\displaystyle\sup_{n\in N}\frac{u_\varphi(A_n)^{\frac{1}{q}}}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}<\infty$ が成り立つ．

(iii) $\nu\varphi^{-1}(B)=0$ であって，しかも，つぎのような定数 c が 存在する．

ある A_n に含まれている 任意の $E\in\mathfrak{M}$ について，$\nu\varphi^{-1}(E)^{\frac{1}{q}}\le c\mu(E)^{\frac{1}{p}}$

これらの (i) ～ (iii) の どれかひとつが 成り立つとき，C_φ は，$L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^q(Y,\mathfrak{N},\nu)$ への有界線形作用素になり，

$$\|C_\varphi\|=\sup_{n\in N}\frac{u_\varphi(A_n)^{\frac{1}{q}}}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}=\inf\left\{c\ge 0:\nu\varphi^{-1}(A_n)^{\frac{1}{q}}\le c\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}\quad(n\in N)\right\}.$$

ただし，$u_\varphi(A_n)=\dfrac{1}{\mu(A_n)}\displaystyle\int_{A_n}u_\varphi\,d\mu$.

系 1.4. $1\le p<q<\infty$ とする．また，測度 μ は 非原子的であって，一方で，測度 ν は $\nu(Y)>0$ をみたすものとする．このとき，$\mathfrak{L}(X)$ から $\mathfrak{L}(Y)$ への合成作用素が，$L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^q(Y,\mathfrak{N},\nu)$ への写像になることは ありえない．

例． $X=Y=(0,\infty)$ とし，$\mathfrak{M}$ を $(0,\infty)$ 上の Lebesgue 可測集合全体，μ を $\mathfrak{M}$ 上の Lebesgue 測度とする．まず，X から X への可測変換 φ を，

$$\varphi(x)=2x\qquad(x\in X)$$

と定める．このとき，合成作用素 C_φ は，$L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ への有界線形作用素になる $(1\le p<\infty)$．ところが，この C_φ は，$L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^1(X,\mathfrak{M},\mu)$ への写像にはならない．今度は，各自然数 j について，$E_j=(j-1,j]$ とおいて，X から X への可測変換 ψ を，

$$\psi(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(j^2x+\sum_{k=0}^{j-1}k^2\right)\chi_{E_j}(x)\qquad(x\in X)$$

と定める．すると，合成作用素 C_ψ は，$L^2(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^1(X,\mathfrak{M},\mu)$ への有界線形作用素になる．

2. 閉値域をもつ合成作用素

この節では,

合成作用素が 閉値域をもつかどうか?

という問題について 考える. このような話題は, すでに, W.A. Cima, J. Thomson and W. Wogen [3] や R.K. Singh and A. Kumar [18] らが とりあげている. 実際, [3] では, Hardy 空間 $H^p(D)$ 上の合成作用素について, [18] では, L^2-空間上の合成作用素について, それらが閉値域をもつための必要十分条件が 与えられている. ここでは, [18] の結果を 拡張すべく, つぎの問題に 取り組む.

$L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^q(Y,\mathfrak{N},\nu)$ への合成作用素 C_φ が, 閉値域をもつための必要十分条件を 求めよ.

つぎの 3 つの定理は, この問題に対する答である. なお, 記号等は 前節のものを そのまま 用いる.

I. $p=q$ の場合

定理 2.1. $1 \le p < \infty$ とする. $L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^p(Y,\mathfrak{N},\nu)$ への合成作用素 C_φ について, つぎの 3 条件 (i) ~ (iii) は たがいに同値である.

(i) C_φ が 閉値域をもつ.

(ii) 集合 $\{x \in X : u_\varphi(x) \neq 0\}$ 上で ほとんどいたるところ $u_\varphi \ge \delta$ となる 定数 $\delta > 0$ が存在する.

(iii) つぎ式をみたす $\delta > 0$ が存在する.

$$\nu\varphi^{-1}(E) \ge \delta\,\mu(E) \qquad (E \in \mathcal{E}_\varphi)\ .$$

ただし, $\mathcal{E}_\varphi = \left\{ E \in \mathfrak{M} : \begin{array}{l} \mu(E) < \infty \\ F \in \mathfrak{M},\, F \subset E,\, \nu\varphi^{-1}(F) = 0 \implies \mu(F) = 0 \end{array} \right\}$ とする.

II. $p>q$ の場合

定理 2.2. $1 \le q < p < \infty$ とする. $L^p(X,\mathfrak{M},\mu)$ から $L^q(Y,\mathfrak{N},\nu)$ への合成作用素 C_φ について, つぎの 3 条件 (i) ~ (iii) は たがいに同値である.

(i) C_φ が 閉値域をもつ.

(ii) u_φ が B 上で ほとんどいたるところ 0 で, かつ, $\displaystyle\inf_{u_\varphi(A_n)\neq 0} u_\varphi(A_n)^{\frac{1}{q}}\,\mu(A_n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} > 0$ が成り立つ.

(iii) $\nu\varphi^{-1}(B) = 0$ かつ $\displaystyle\sup_{\nu\varphi^{-1}(A_n)\neq 0} \frac{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}}{\nu\varphi^{-1}(A_n)^{\frac{1}{q}}} < \infty\ .$

III. $p < q$ の場合

定理 2.3. $1 \leq p < q < \infty$ とする. $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ から $L^q(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ への合成作用素 C_φ について, つぎの 3 条件 (i) ~ (iii) は たがいに同値である.

(i) C_φ が 閉値域をもつ.

(ii) $$\sum_{u_\varphi(A_n)\neq 0} \frac{\mu(A_n)}{u_\varphi(A_n)^{\frac{p}{p-q}}} < \infty .$$

(iii) $$\sum_{\nu\varphi^{-1}(A_n)\neq 0} \left\{ \frac{\mu(A_n)^q}{\nu\varphi^{-1}(A_n)^p} \right\}^{\frac{1}{p-q}} < \infty .$$

詳しい証明等は, [24] を ごらんください.

参考文献

[1] S. Axler, *Zero multipliers of Bergman spaces*, Canad. Math. Bull., **28** (1985), 237–242.

[2] J.W. Carlson, *The spectra and commutants of some weighted composition operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **317** (1990), 631–654.

[3] J.A. Cima, J. Thomson and W. Wogen, *On some properties of composition operators*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1974), 215–220.

[4] C.C. Cowen, *Composition operators on Hilbert spaces of analytic functions; A status report*, in "Operator Theory / Operator Algebras and Applicantions," **51** Part I, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1990, pp. 131–145.

[5] C.C. Cowen and B.D. MacCleur, "Composition Operators on Spaces of Analytic Functions," CRC Press, Boca Raton, 1995.

[6] W. Feldman, *Compact weighted composition operators on Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc., **108** (1990), 95–99.

[7] T. Hoover and A. Lambert, *Essentially normal composition operators on L^2*, Acta Sci. Math. (Szeged), **55** (1991), 403–408.

[8] K. Izuchi, *A function theoretic proof of Axler's zero multiplier theorem*, Canad. Math. Bull., **31** (1988), 117–120.

[9] A. Kumar, *On composition operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **56** (1992), 335–345.

[10] A. Lambert, *Hyponormal composition operators*, Bull. London Math. Soc.,**18** (1986), 395–400.

[11] E.A. Nordgren, *Composition operators*, Canad. J. Math., **20** (1968), 442–449.

[12] E.A. Nordgren, *Composition operators on Hilbert spaces*, in "Hilbert Space Operators," Lecture Note in Math., **693**, Springer-Verlag, New York, 1978, pp. 38–63.

[13] S. Ohno (大野修一), *Multipliers on the spaces of analytic functions*, 関数環研究会集会報告集 (信州大, 1994), 65–72.

[14] W.C. Ridge, *Characterization of abstract composition operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **45** (1974), 393–396.

[15] H.J. Schwartz, *Composition operators on H^p*, Thesis, Univ. Toledo, 1969.

[16] J.H. Shapiro, "Composition Operators and Classical Function Theory," Springer-Verlag, New York, 1993.

[17] R.K. Singh, *Composition operators induced by rational functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 329–333.

[18] R.K. Singh and A. Kumar, *Multiplication operators and composition operators with closed range*, Bull. Aust. Math. Soc., **16** (1977), 247–252.

[19] R.K. Singh and A. Kumar, *Compact composition operators*, J. Aust. Math. Soc. (Series A), **28** (1979), 309–314.

[20] R.K. Singh and J.S. Manhas, "Composition Operators on Function Spaces," North-Holland, 1993.

[21] R.K. Singh and T. Veluchamy, *Non-atomic measure spaces and Fredholm composition operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **51** (1987), 461–465.

[22] H. Takagi, *Compact weighted composition operators on L^p*, Proc. Amer. Math. Soc., **116** (1992), 505–511.

[23] R. Whitley, *Normal and quasinormal composition operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **70** (1978), 114–118.

[24] K. Yokouchi (横内 克彦), L^p-空間の間の合成作用素, 修士論文, 信州大学, 1996.